

1.1 Pretvarjanje enot

1. Pretvori v osnovno enoto.

a) 0,8 cm (centimeter)

Kadar so količine zapisane s predponami, je za pretvarjanje potrebno poznati vrednost predpon. V takih primerih je pretvarjanje preprosto, saj namesto predpon postavimo le njihovo vrednost:

$$0,8 \text{ cm} = 0,8 \cdot 10^{-2} \text{ m} = \underline{\underline{8 \cdot 10^{-3} \text{ m}}}$$

b) 16 μ s (mikrosekunda)

$$16 \mu\text{s} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ s} = \underline{\underline{1,6 \cdot 10^{-5} \text{ s}}}$$

c) 22 mA (miliamper)

$$22 \text{ mA} = 22 \cdot 10^{-3} \text{ A} = \underline{\underline{2,2 \cdot 10^{-2} \text{ A}}}$$

d) 1,7 kK (kilokelvin)

$$1,7 \text{ kK} = \underline{\underline{1,7 \cdot 10^3 \text{ K}}}$$

e) 13 Mmol (megamol)

$$13 \text{ Mmol} = 13 \cdot 10^6 \text{ mol} = \underline{\underline{1,3 \cdot 10^7 \text{ mol}}}$$

f) 0,32 mg (miligram)

Osnovna enota za maso ni gram (g), ampak kilogram (kg), zato moramo to upoštevati. To naredimo tako, da najprej pretvorimo v g, potem pa v kg. Ker je gram tisočinka kilograma, pri pretvarjanju iz g v kg pomnožimo z 10^{-3} :

$$\begin{aligned} 0,32 \text{ mg} &= 0,32 \cdot 10^{-3} \text{ g} = 0,32 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \text{ kg} = \\ &= 0,32 \cdot 10^{-6} \text{ kg} = \underline{\underline{3,2 \cdot 10^{-7} \text{ kg}}} \end{aligned}$$

Uporabili smo pravilo za množenje potenc z enakimi osnovami (v tem primeru z osnovo 10):

$$10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$$

g) 17 Gg (gigagram)

$$\begin{aligned} 17 \text{ Gg} &= 17 \cdot 10^9 \text{ g} = 17 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = \\ &= 17 \cdot 10^6 \text{ kg} = \underline{\underline{1,7 \cdot 10^7 \text{ kg}}} \end{aligned}$$

2. Pretvori v osnovno enoto.

a) 23 mm²

Pri pretvarjanju enot za površino in prostornino pazimo na to, da tudi pri pretvorniku ne pozabimo na ustrezen eksponent (2 ali 3):

$$\begin{aligned} 23 \text{ mm}^2 &= 23 \cdot (10^{-3})^2 \text{ m}^2 = 23 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = \\ &= \underline{\underline{2,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2}} \end{aligned}$$

Uporabili smo pravilo za potenciranje potenc:

$$(10^a)^b = 10^{ab}$$

b) 16 Gm²

$$\begin{aligned} 16 \text{ Gm}^2 &= 16 \cdot (10^9)^2 \text{ m}^2 = 16 \cdot 10^{18} \text{ m}^2 = \\ &= \underline{\underline{1,6 \cdot 10^{19} \text{ m}^2}} \end{aligned}$$

c) 1,8 km³

$$1,8 \text{ km}^3 = 1,8 \cdot (10^3)^3 \text{ m}^3 = \underline{\underline{1,8 \cdot 10^9 \text{ m}^3}}$$

d) 1,1 μ m³

$$1,1 \mu\text{m}^3 = 1,1 \cdot (10^{-6})^3 \text{ m}^3 = \underline{\underline{1,1 \cdot 10^{-18} \text{ m}^3}}$$

3. Pretvori v osnovno enoto.

a) 13 ms

$$13 \text{ ms} = 13 \cdot 10^{-3} \text{ s} = \underline{\underline{1,3 \cdot 10^{-2} \text{ s}}}$$

b) 6,3 min

Pretvorbe časovnih enot so v nekaterih primerih drugačne od ostalih. Upoštevati moramo, da je 1 min = 60 s, 1 h = 60 min in 1 dan = 24 h. To upoštevamo tako, da pri pretvarjanju iz večje v manjšo enoto (dan $\rightarrow$ h, h $\rightarrow$ min, min $\rightarrow$ s) množimo s pretvornikom (60 ali 24), v obratni smeri pa delimo s pretvornikom:

$$6,3 \text{ min} = 6,3 \cdot 60 \text{ s} = \underline{\underline{378 \text{ s}}}$$

c) 0,05 h

$$\begin{aligned} 0,05 \text{ h} &= 0,05 \cdot 60 \text{ min} = 0,05 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 180 \text{ s} = \\ &= \underline{\underline{1,8 \cdot 10^2 \text{ s}}} \end{aligned}$$

d) 13 dni

$$\begin{aligned}13 \text{ dni} &= 13 \cdot 24 \text{ h} = 13 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min} = \\&= 13 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 1\,123\,200 \text{ s} = \\&= 1,1232 \cdot 10^6 \text{ s} = \underline{\underline{1,1 \cdot 10^6 \text{ s}}}\end{aligned}$$

4. Pretvori v osnovno enoto.

a) $16 \frac{\text{mg}}{\text{cm}^3}$

Enote v ulomku pretvorimo tako, da pretvorimo posebej enote v števci in posebej enote v imenovalcu, potem pa uporabimo pravilo za deljenje potenc:

$$\frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$$

$$16 \frac{\text{mg}}{\text{cm}^3} = 16 \cdot \frac{10^{-3} \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{(10^{-2})^3 \text{ m}^3} = 16 \cdot \frac{10^{-6} \text{ kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} = \underline{\underline{16 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}$$

b) $3,0 \frac{\text{Mg}}{\mu\text{m}^3}$

$$\begin{aligned}3,0 \frac{\text{Mg}}{\mu\text{m}^3} &= 3,0 \cdot \frac{10^6 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{(10^{-6})^3 \text{ m}^3} = \\&= 3,0 \cdot \frac{10^3 \text{ kg}}{10^{-18} \text{ m}^3} = \underline{\underline{3,0 \cdot 10^{21} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}\end{aligned}$$

c) $6,1 \frac{\text{dag}}{\text{km}^3}$

$$\begin{aligned}6,1 \frac{\text{dag}}{\text{km}^3} &= 6,1 \cdot \frac{10^1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{(10^3)^3 \text{ m}^3} = \\&= 6,1 \cdot \frac{10^{-2} \text{ kg}}{10^9 \text{ m}^3} = \underline{\underline{6,1 \cdot 10^{-11} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}\end{aligned}$$

d) $7,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Pri pretvorbah časovnih enot po potrebi dokončamo pretvorbo s kalkulatorjem:

$$7,8 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 7,8 \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{60 \cdot 60 \text{ s}} = 2,167 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

e) $1,5 \frac{\text{Mm}}{\text{cs}}$

$$1,5 \frac{\text{Mm}}{\text{cs}} = 1,5 \cdot \frac{10^6 \text{ m}}{10^{-2} \text{ s}} = \underline{\underline{1,5 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

f) $3,8 \frac{\mu\text{m}}{\text{min}}$

$$3,8 \frac{\mu\text{m}}{\text{min}} = 3,8 \cdot \frac{10^{-6} \text{ m}}{60 \text{ s}} = \underline{\underline{6,3 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

5. Pretvori v zahtevano enoto.

a) 6 mA v kA

V takih primerih najprej pretvorimo v osnovne enote, potem v zahtevane (razen pri masi, kjer pretvorimo v g in nato naprej). Pazimo le, da je eksponent potence pretvornika pri pretvarjanju iz večje v manjšo enoto pozitiven, obratno pa negativen. Na primer:

$$3 \text{ km} = 3 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$16 \text{ m} = 16 \cdot 10^{-3} \text{ km}$$

$$6 \text{ mA} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \text{ kA} = \underline{\underline{6 \cdot 10^{-6} \text{ kA}}}$$

b) 13 cmol v μmol

$$\begin{aligned}13 \text{ cmol} &= 13 \cdot 10^{-2} \text{ mol} = 13 \cdot 10^{-2} \cdot 10^6 \mu\text{mol} \\&= 13 \cdot 10^4 \mu\text{mol} = \underline{\underline{1,3 \cdot 10^5 \mu\text{mol}}}\end{aligned}$$

c) 4 kcd v dcd

$$4 \text{ kcd} = 4 \cdot 10^3 \text{ cd} = 4 \cdot 10^3 \cdot 10^1 \text{ dcd} = \underline{\underline{4 \cdot 10^4 \text{ dcd}}}$$

d) 0,07 MK v kK

$$\begin{aligned}0,07 \text{ MK} &= 0,07 \cdot 10^6 \text{ K} = 0,07 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} \text{ kK} = \\&= 0,07 \cdot 10^3 \text{ kK} = \underline{\underline{70 \text{ kK}}}\end{aligned}$$

e) $0,3 \text{ cm}^2$ v km^2

$$\begin{aligned}0,3 \text{ cm}^2 &= 0,3 \cdot (10^{-2})^2 \text{ m}^2 = 0,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = \\&= 0,3 \cdot 10^{-4} \cdot (10^{-3})^2 \text{ km}^2 = \\&= 0,3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-6} \text{ km}^2 = \\&= 0,3 \cdot 10^{-10} \text{ km}^2 = \underline{\underline{3 \cdot 10^{-11} \text{ km}^2}}\end{aligned}$$

f) 31 Pm² v Gm²

$$\begin{aligned}31 \text{ Pm}^2 &= 31 \cdot (10^{15})^2 \text{ m}^2 = 31 \cdot 10^{30} \text{ m}^2 = \\&= 31 \cdot 10^{30} \cdot (10^{-9})^2 \text{ Gm}^2 = \\&= 31 \cdot 10^{30} \cdot 10^{-18} \text{ Gm}^2 = \\&= 31 \cdot 10^{12} \text{ Gm}^2 = \underline{\underline{3,1 \cdot 10^{13} \text{ Gm}^2}}\end{aligned}$$

g) $7 \text{ dam}^3 \text{ v } \text{dm}^3$

$$\begin{aligned} 7 \text{ dam}^3 &= 7 \cdot (10^1)^3 \text{ m}^3 = 7 \cdot 10^3 \text{ m}^3 = \\ &= 7 \cdot 10^3 \cdot (10^1)^3 \text{ dm}^3 = 7 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \text{ dm}^3 = \\ &= \underline{\underline{7 \cdot 10^6 \text{ dm}^3}} \end{aligned}$$

h) $0,38 \text{ nm}^3 \text{ v } \text{cm}^3$

$$\begin{aligned} 0,38 \text{ nm}^3 &= 0,38 \cdot (10^{-9})^3 \text{ m}^3 = 0,38 \cdot 10^{-27} \text{ m}^3 = \\ &= 0,38 \cdot 10^{-27} \cdot (10^2)^3 \text{ cm}^3 = \\ &= 0,38 \cdot 10^{-27} \cdot 10^6 \text{ cm}^3 = \\ &= 0,38 \cdot 10^{-21} \text{ cm}^3 = \underline{\underline{3,8 \cdot 10^{-22} \text{ cm}^3}} \end{aligned}$$

i) 16 s v min

$$16 \text{ s} = \frac{16}{60} \text{ min} = 0,267 \text{ min} = \underline{\underline{0,27 \text{ min}}}$$

j) $3,4 \text{ cs v h}$

$$\begin{aligned} 3,4 \text{ cs} &= 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ s} = \frac{3,4 \cdot 10^{-2}}{60} \text{ min} = \\ &= \frac{3,4 \cdot 10^{-2}}{60 \cdot 60} \text{ h} = \frac{3,4 \cdot 10^{-2}}{3600} \text{ h} = \\ &= \underline{\underline{9,4 \cdot 10^{-6} \text{ h}}} \end{aligned}$$

k) $1,4 \text{ ds v dni}$

$$\begin{aligned} 1,4 \text{ ds} &= 1,4 \cdot 10^{-1} \text{ s} = \frac{1,4 \cdot 10^{-1}}{60} \text{ min} = \\ &= \frac{1,4 \cdot 10^{-1}}{60 \cdot 60} \text{ h} = \frac{1,4 \cdot 10^{-1}}{60 \cdot 60 \cdot 24} \text{ dni} = \\ &= \frac{1,4 \cdot 10^{-1}}{86400} \text{ dni} = \underline{\underline{1,6 \cdot 10^{-6} \text{ dni}}} \end{aligned}$$

l) $6 \frac{\text{mg}}{\text{dm}^3} \text{ v } \frac{\text{cg}}{\mu\text{m}^3}$

$$\begin{aligned} 6 \frac{\text{mg}}{\text{dm}^3} &= 6 \cdot \frac{10^{-3} \text{ g}}{(10^{-1})^3 \text{ m}^3} = 6 \cdot \frac{10^{-3} \cdot 10^2 \text{ cg}}{10^{-3} \cdot (10^6)^3 \mu\text{m}^3} = \\ &= 6 \cdot \frac{10^{-1} \text{ cg}}{10^{-3} \cdot 10^{18} \mu\text{m}^3} = 6 \cdot \frac{10^{-1} \cdot \text{cg}}{10^{15} \mu\text{m}^3} = \\ &= 6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-15} \frac{\text{cg}}{\mu\text{m}^3} = \underline{\underline{6 \cdot 10^{-16} \frac{\text{cg}}{\mu\text{m}^3}}} \end{aligned}$$

m) $1,5 \frac{\text{Gg}}{\text{km}^3} \text{ v } \frac{\mu\text{g}}{\text{pm}^3}$

$$\begin{aligned} 1,5 \frac{\text{Gg}}{\text{km}^3} &= 1,5 \cdot \frac{10^9 \text{ g}}{(10^3)^3 \text{ m}^3} = \\ &= 1,5 \cdot \frac{10^9 \cdot 10^6 \mu\text{g}}{10^9 (10^{12})^3 \text{ pm}^3} = \\ &= 1,5 \cdot \frac{10^{15} \mu\text{g}}{10^9 \cdot 10^{36} \text{ pm}^3} = \\ &= 1,5 \cdot \frac{10^{15} \mu\text{g}}{10^{45} \text{ pm}^3} = \\ &= 1,5 \cdot 10^{15} \cdot 10^{-45} \frac{\mu\text{g}}{\text{pm}^3} = \\ &= \underline{\underline{1,5 \cdot 10^{-30} \frac{\mu\text{g}}{\text{pm}^3}}} \end{aligned}$$

n) $9,2 \frac{\text{cm}}{\text{min}} \text{ v } \frac{\mu\text{m}}{\text{ds}}$

$$\begin{aligned} 9,2 \frac{\text{cm}}{\text{min}} &= 9,2 \cdot \frac{10^{-2} \text{ m}}{60 \text{ s}} = \\ &= 9,2 \cdot \frac{10^{-2} \cdot 10^6 \mu\text{m}}{60 \cdot 10^1 \text{ ds}} = \\ &= \frac{9,2}{60} \cdot \frac{10^4 \mu\text{m}}{10^1 \text{ ds}} = \\ &= 0,1533 \cdot 10^4 \cdot 10^{-1} \frac{\mu\text{m}}{\text{ds}} = \\ &= 0,1533 \cdot 10^3 \frac{\mu\text{m}}{\text{ds}} = \\ &= \underline{\underline{1,5 \cdot 10^2 \frac{\mu\text{m}}{\text{ds}}}} \end{aligned}$$

o) $7,9 \frac{\text{Mm}}{\text{h}} \text{ v } \frac{\text{km}}{\text{min}}$

$$\begin{aligned} 7,9 \frac{\text{Mm}}{\text{h}} &= 7,9 \frac{10^6 \text{ m}}{60 \text{ min}} = 7,9 \cdot \frac{10^6 \text{ m}}{60 \text{ min}} = \\ &= 7,9 \cdot \frac{10^6 \cdot 10^{-3} \text{ km}}{60 \text{ min}} = 7,9 \cdot \frac{10^3 \text{ km}}{60 \text{ min}} = \\ &= \frac{7,9}{60} \cdot 10^3 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 0,1317 \cdot 10^3 \frac{\text{km}}{\text{min}} = \\ &= \underline{\underline{1,3 \cdot 10^2 \frac{\text{km}}{\text{min}}}} \end{aligned}$$

6. Pretvori v osnovno enoto. Pri tem upoštevaj, da je 1 čevelj = 0,31 m. (Čevelj označimo s ft = foot).

a) 13 ft

$$13 \text{ ft} = 13 \cdot 0,31 \text{ m} = 4,03 \text{ m} = \underline{\underline{4,0 \text{ m}}}$$

b) 0,6 ft

$$0,6 \text{ ft} = 0,6 \cdot 0,31 \text{ m} = 0,186 \text{ m} = \underline{\underline{0,2 \text{ m}}}$$

c) 5 ft²

Ne pozabimo tudi pretvornik potencirati z ustreznim eksponentom:

$$5 \text{ ft}^2 = 5 \cdot (0,31 \text{ m})^2 = 0,4805 \text{ m}^2 = \underline{\underline{0,5 \text{ m}^2}}$$

d) 31 ft³

$$31 \text{ ft}^3 = 31 \cdot (0,31 \text{ m})^3 = 0,9235 \text{ m}^3 = \underline{\underline{0,92 \text{ m}^3}}$$

7. Pretvori v osnovno enoto.

a) 3,5 min²

$$\begin{aligned} 3,5 \text{ min}^2 &= 3,5(60 \text{ s})^2 = 3,5 \cdot 3600 \text{ s}^2 = \\ &= 12600 \text{ s}^2 = 12,6 \cdot 10^3 \text{ s}^2 = \underline{\underline{1,3 \cdot 10^4 \text{ s}^2}} \end{aligned}$$

b) 6,3 $\frac{\text{km}}{\text{h}^2}$

$$\begin{aligned} 6,3 \frac{\text{km}}{\text{h}^2} &= 6,3 \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{(60 \text{ min})^2} = 6,3 \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{3600 \text{ min}^2} = \\ &= 6,3 \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{3600 \cdot (60 \text{ s})^2} = 6,3 \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{3600 \cdot 3600 \text{ s}^2} = \\ &= \frac{6,3 \cdot 10^3 \text{ m}}{12960000 \text{ s}^2} = \underline{\underline{4,9 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \end{aligned}$$

c) 3,6 $\frac{\text{mm}}{\mu\text{s}^2}$

$$\begin{aligned} 3,6 \frac{\text{mm}}{\mu\text{s}^2} &= 3,6 \cdot \frac{10^{-3} \text{ m}}{(10^{-6})^2 \text{ s}^2} = 3,6 \cdot \frac{10^{-3} \text{ m}}{10^{-12} \text{ s}^2} = \\ &= 3,6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{12} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{3,6 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \end{aligned}$$

d) 0,4 $\frac{\text{gdm}}{\text{h}^2}$

$$\begin{aligned} 0,4 \frac{\text{gdm}}{\text{h}^2} &= 0,4 \cdot \frac{10^{-3} \text{ kg} \cdot 10^{-1} \text{ m}}{(60 \text{ min})^2} = \\ &= 0,4 \cdot \frac{10^{-4} \text{ kgm}}{3600 \cdot \text{min}^2} = 0,4 \cdot \frac{10^{-4} \text{ kgm}}{3600 \cdot (60 \text{ s})^2} = \\ &= 0,4 \cdot \frac{10^{-4} \text{ kgm}}{3600 \cdot 3600 \text{ s}^2} = \frac{0,4 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}}{12960000 \text{ s}^2} = \\ &= \underline{\underline{3 \cdot 10^{-12} \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}}} \end{aligned}$$

1.2 Merske napake

1.2 Merske napake

1. Večkrat izmerimo premer kovinske kroglice in dobimo naslednje vrednosti: 2,35 cm, 2,37 cm, 2,33 cm, 2,38 cm in 2,36 cm. Izračunaj povprečno vrednost premera in določi absolutno ter relativno napako meritve. Premer zapiši z absolutno in relativno napako.

Podatki:

$$d_1 = 2,35 \text{ cm}$$

$$d_2 = 2,37 \text{ cm}$$

$$d_3 = 2,33 \text{ cm}$$

$$d_4 = 2,38 \text{ cm}$$

$$d_5 = 2,36 \text{ cm}$$

Povprečna vrednost meritev je njihova vsota deljena s številom meritev:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Povprečni premer kroglice je tako:

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}{5} = \\ &= \frac{2,35 \text{ cm} + 2,37 \text{ cm} + 2,33 \text{ cm} + 2,38 \text{ cm} + 2,36 \text{ cm}}{5} = \\ &= 2,36 \text{ cm} \end{aligned}$$

Da bomo dobili oceno napake meritve, za vsako meritev izračunajmo razliko med vrednostjo meritve in povprečno vrednostjo ($x_n - \bar{x}$):

$$d_1 - \bar{d} = -0,008 \text{ cm}$$

$$d_2 - \bar{d} = 0,012 \text{ cm}$$

$$d_3 - \bar{d} = -0,028 \text{ cm}$$

$$d_4 - \bar{d} = 0,022 \text{ cm}$$

$$d_5 - \bar{d} = 0,002 \text{ cm}$$

Ker so predznaki razlik nepomembni, zapišimo njihove absolutne vrednosti:

$$|d_1 - \bar{d}| = 0,008 \text{ cm}$$

$$|d_2 - \bar{d}| = 0,012 \text{ cm}$$

$$|d_3 - \bar{d}| = 0,028 \text{ cm}$$

$$|d_4 - \bar{d}| = 0,022 \text{ cm}$$

$$|d_5 - \bar{d}| = 0,002 \text{ cm}$$

Izmed teh vrednosti izločimo tretjino največjih. Tretjina od 5 je $1,67 \div 2$; izločili bomo torej dve največji razliki: 0,028 cm in 0,022 cm. Absolutna napaka meritve premera je naslednja največja, torej 0,012 cm. Zaokrožimo jo na **eno mesto**:

$$\Delta d = 0,01 \text{ cm}$$

Pomembno je, da napako zaokrožimo na prvo neničelno mesto. Če je napaka že na tem mestu (v našem primeru pri stotinkah centimetra), nas vrednosti naprej ne zanimajo, saj so kvečjemu še bolj nenatančne. Zavedati se moramo, da napaka meritve ni natančna vrednost, ampak le **ocena**, torej približna vrednost. Ponavadi nas niti toliko ne zanima vrednost napake, pač pa le njen velikostni red (ali je napaka pri desetnicah, enicah, desetinkah, stotinkah ...).

Zapišimo rezultat (premer) v zapisu z absolutno napako:

$$d = \bar{d} \pm \Delta d$$

$$d = \underline{2,36 \text{ cm} \pm 0,01 \text{ cm}}$$

Tudi povprečno vrednost zaokrožimo na istem mestu, kot smo zaokrožili absolutno napako, torej pri stotinkah centimetra. To moramo nujno storiti, saj natančnost meritve določa absolutna napaka.

Relativno napako dobimo tako, da absolutno napako delimo s povprečno vrednostjo:

$$\delta d = \frac{\Delta d}{\bar{d}} = \frac{0,01 \text{ cm}}{2,36 \text{ cm}} = 0,0042$$

Relativno napako zaokrožimo na dve, največ tri mesta.

Ponavadi relativno napako podajamo v procentih:

$$\delta d = 0,0042 \cdot 100 \% = 0,42 \%$$

Podajmo meritev še z relativno napako:

$$d = \bar{d}(1 \pm \delta d)$$

$$d = \underline{2,36 \text{ cm}(1 \pm 0,42 \%)}$$

Ponavadi imajo dijaki kar nekaj težav z zaokrožanjem absolutnih napak in povprečnih vrednosti. Zapomnimo si, da ima absolutna napaka vedno le eno neničelno mesto. Oglejmo si nekaj zgledov, kako bi zaokrožili vrednost na eno neničelno mesto:

$$123 \text{ kg} \rightarrow 100 \text{ kg}$$

$$0,154 \text{ m} \rightarrow 0,2 \text{ m}$$

$$64,5 \text{ s} \rightarrow 60 \text{ s}$$

$$3,2 \cdot 10^3 \text{ m} \rightarrow 3 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$0,0027 \text{ mm} \rightarrow 0,003 \text{ mm}$$

$$251 \text{ min} \rightarrow 300 \text{ min} \dots$$

Povprečno vrednost meritve zaokrožimo na istem mestu, kot je zaokrožena absolutna napaka. Za lažje razumevanje si oglejmo še nekaj takih zgledov:

$$1\,245 \text{ kg} \pm 100 \text{ kg} \rightarrow 1\,200 \text{ kg} \pm 100 \text{ kg}$$

$$12,25 \text{ m} \pm 0,2 \text{ m} \rightarrow 12,3 \text{ m} \pm 0,2 \text{ m}$$

$$356 \text{ s} \pm 60 \text{ s} \rightarrow 360 \text{ s} \pm 60 \text{ s}$$

$$12,6 \cdot 10^3 \text{ m} \pm 3 \cdot 10^3 \text{ m} \rightarrow 13 \cdot 10^3 \text{ m} \pm 3 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$13,4 \text{ mm} \pm 0,003 \text{ mm} \rightarrow 13,400 \text{ mm} \pm 0,003 \text{ mm}$$

$$5\,6371 \text{ min} \pm 300 \text{ min} \rightarrow 56\,400 \text{ min} \pm 300 \text{ min} \dots$$

Zapomnimo si, da rezultat vedno zaokrožamo glede na absolutno napako, relativna napaka pa nam pove, kako dobro smo količino izmerili (manjša je relativna napaka, boljše je meritev).

2. Dana sta izmerka $a = 12,6 \pm 0,2$ in $b = 8,5 \pm 0,3$. Izračunaj njuno vsoto, razliko, produkt in kvocient. Rezultate pravilno zaokroži.

Podatki:

$$a = 12,6 \pm 0,2$$

$$b = 8,5 \pm 0,3$$

Izračunajmo vsoto izmerkova a in b :

$$a + b = 12,6 + 8,5 = 21,1$$

Absolutna napaka vsote je vsota absolutnih napak:

$$\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b = 0,2 + 0,3 = 0,5$$

Zapis vsote z absolutno napako je tako:

$$a + b = \underline{21,1 \pm 0,5}$$

Absolutna napaka in vsota sta že pravilno zapisani, zato zaokrožanje ni potrebno.

Razlika izmerkova je:

$$a - b = 12,6 - 8,5 = 4,1$$

Tudi pri odštevanju se absolutne napake seštevajo:

$$\begin{aligned}\Delta(a - b) &= \Delta a + \Delta b = \\ &= 0,2 + 0,3 = 0,5\end{aligned}$$

Zapišimo razliko izmerkov z absolutno napako:

$$(a - b) = \underline{4,1 \pm 0,5}$$

Tudi v tem primeru zaokrožanje ni potrebno.

Sedaj izračunajmo produkt izmerkov:

$$ab = 12,6 \cdot 8,5 = 107,1$$

Pri množenju se seštevajo relativne napake, zato najprej izračunajmo relativni napaki izmerkov a in b :

$$a = 12,6 \pm 0,2 = 12,6(1 \pm 0,016) = 12,6(1 \pm 1,6 \%)$$

$$b = 8,5 \pm 0,3 = 8,5(1 \pm 0,035) = 8,5(1 \pm 3,5 \%)$$

Relativna napaka produkta izmerkov je tako:

$$\delta(ab) = \delta a + \delta b = 1,6 \% + 3,5 \% = 5,1 \%$$

Da bi pravilno zaokrožili produkt, izračunajmo njegovo absolutno napako:

$$\Delta(ab) = ab \cdot \delta(ab) = 107,1 \cdot 0,051 = 5,4621$$

Tako je:

$$\Delta(ab) = 5$$

Zaokrožimo produkt in ga zapišimo v obliki z absolutno napako:

$$ab = \underline{107 \pm 5}$$

Na koncu izračunajmo še kvocient izmerkov a in b :

$$\frac{a}{b} = 1,48235$$

Kot pri množenju izmerkov se tudi pri deljenju izmerkov relativne napake seštevajo. Relativna napaka kvocienta je tako enaka kot relativna napaka produkta:

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta a + \delta b = 1,6 \% + 3,5 \% = 5,1 \%$$

Od tod izračunajmo absolutno napako kvocienta:

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} \cdot \delta\left(\frac{a}{b}\right) = 1,48235 \cdot 0,051 = 0,0756$$

1.2 Merske napake

Torej je:

$$\Delta(ab) = 0,08$$

Zaokrožimo kvocient in ga zapišimo v obliki z absolutno napako:

$$ab = \underline{1,48 \pm 0,08}$$

Čeprav poznamo pravila za računanje z napakami pri vseh matematičnih operacijah, se v srednji šoli ponavadi uporabljajo le pravila za seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje, ki smo jih uporabili v tej nalogi.

3. Da bi natančneje izmerili čas dijaka, ki teče na 100 m dolgi progi, je 10 časomerilcev merilo naenkrat. Dobili so naslednje rezultate: 12,3 s, 12,6 s, 12,0 s, 12,2 s, 12,5 s, 12,3 s, 12,5 s, 12,7 s, 12,3 s in 12,1 s. Čas podaj v zapisih z absolutno in relativno napako. Izračunaj povprečno hitrost dijaka na 100 m dolgi poti. Kolikšna je absolutna napaka hitrosti, če je dolžina poti 100 m določena z 1,0-odstotno natančnostjo? Povprečna hitrost je kvocient poti in časa ($\bar{v} = \frac{s}{t}$).

Podatki:

$$t_1 = 12,3 \text{ s} \quad t_6 = 12,3 \text{ s} \quad s = 100 \text{ m } (1 \pm 1,0 \%)$$

$$t_2 = 12,6 \text{ s} \quad t_7 = 12,5 \text{ s}$$

$$t_3 = 12,0 \text{ s} \quad t_8 = 12,7 \text{ s}$$

$$t_4 = 12,2 \text{ s} \quad t_9 = 12,3 \text{ s}$$

$$t_5 = 12,5 \text{ s} \quad t_{10} = 12,1 \text{ s}$$

Najprej izračunajmo povprečni čas:

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10}}{10} = \\ &= \frac{12,3 \text{ s} + 12,6 \text{ s} + \dots + 12,1 \text{ s}}{10} = 12,35 \text{ s}\end{aligned}$$

Izračunajmo absolutne vrednosti razlik med posamezno meritvijo in povprečno vrednostjo:

$$|t_1 - \bar{t}| = 0,05 \text{ s} \quad |t_6 - \bar{t}| = 0,05 \text{ s}$$

$$|t_2 - \bar{t}| = 0,25 \text{ s} \quad |t_7 - \bar{t}| = 0,15 \text{ s}$$

$$|t_3 - \bar{t}| = 0,35 \text{ s} \quad |t_8 - \bar{t}| = 0,35 \text{ s}$$

$$|t_4 - \bar{t}| = 0,15 \text{ s} \quad |t_9 - \bar{t}| = 0,05 \text{ s}$$

$$|t_5 - \bar{t}| = 0,15 \text{ s} \quad |t_{10} - \bar{t}| = 0,25 \text{ s}$$

Tretjino ($\frac{10}{3} = 3,33 \div 3$) največjih razlik izločimo. To so 0,35 s, 0,35 s in 0,25 s. Največjo od preostalih razlik, torej 0,25 s, zaokrožimo na eno mesto in dobimo absolutno napako:

$$\Delta t = 0,3 \text{ s}$$

Zapišimo čas dijaka z absolutno napako:

$$t = \underline{12,4 \text{ s} \pm 0,3 \text{ s}}$$

Izračunajmo relativno napako časa:

$$\delta t = \frac{\Delta t}{t} = \frac{0,3 \text{ s}}{12,4 \text{ s}} = 0,024 = 2,4 \%$$

Zapišimo čas tekača še z relativno napako:

$$t = \underline{12,4 \text{ s}(1 \pm 2,4 \%)}$$

Izračunajmo povprečno hitrost dijaka:

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{100 \text{ m}}{12,4 \text{ s}} = 8,0645 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Napako hitrosti dobimo tako, da seštejemo relativni napaki poti in časa. Relativna napaka hitrosti je tako:

$$\delta v = \delta s + \delta t = 1 \% + 2,4 \% = 3,4 \%$$

Od tod izračunajmo absolutno napako hitrosti. Najprej relativno napako pretvorimo iz procentov v število (delimo s 100):

$$\delta v = 3,4 \% = 0,034$$

Sedaj to vrednost pomnožimo s povprečno hitrostjo in zaokrožimo na eno mesto:

$$\Delta v = \bar{v} \delta v = 8,0645 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,034 = 0,274193 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dobljeno vrednost zaokrožimo:

$$\Delta v = \underline{0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

Dobili smo absolutno napako povprečne hitrosti dijaka. Čeprav naloga ne zahteva, za konec hitrost zapišimo z absolutno in relativno napako:

$$v = 8,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

in

$$v = 8,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} (1 \pm 3,4 \%)$$

4. Izmerili smo dolžino $a = 36,3 \text{ m} \pm 0,8 \text{ m}$ in širino $b = 11,3 \text{ m} \pm 0,4 \text{ m}$ pravokotne njive. Kolikšna sta obseg in površina njive? Rezultata primerno zaokroži.

Podatki:

$$a = 36,3 \text{ m} \pm 0,8 \text{ m}$$

$$b = 11,3 \text{ m} \pm 0,4 \text{ m}$$

Izračunajmo obseg njive:

$$o = 2a + 2b = 2 \cdot 36,3 \text{ m} + 2 \cdot 11,3 \text{ m} = 95,2 \text{ m}$$

Da dobimo napako meritve, zapišimo enačbo za računanje obsega kot:

$$o = a + a + b + b$$

V enačbi nastopa le seštevanje, zato je absolutna napaka obsega seštevek absolutnih napak:

$$\begin{aligned} \Delta o &= \Delta a + \Delta a + \Delta b + \Delta b = \\ &= 2\Delta a + 2\Delta b = 2 \cdot 0,8 \text{ m} + 2 \cdot 0,4 \text{ m} = \\ &= 2,4 \text{ m} = 2 \text{ m} \end{aligned}$$

Obseg zapišimo z absolutno napako in primerno zaokrožimo:

$$o = \underline{95 \text{ m} \pm 2 \text{ m}}$$

Izračunajmo še površino njive. Ker je njiva pravokotna, je njena površina:

$$S = ab = 36,3 \text{ m} \cdot 11,3 \text{ m} = 410,19 \text{ m}^2$$

Pri računanju površine njive smo zmnožili njeno dolžino in njeno širino. Ker se pri množenju seštevajo relativne napake, je relativna napaka površine enaka vsoti relativnih napak dolžine in širine njive. Izračunajmo najprej relativni napaki meritev:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{a} = \frac{0,8 \text{ m}}{36,3 \text{ m}} = 0,022 = 2,2 \%$$

in

$$\delta b = \frac{\Delta b}{b} = \frac{0,4 \text{ m}}{11,3 \text{ m}} = 0,035 = 3,5 \%$$

Relativna napaka površine je tako:

$$\delta S = \delta a + \delta b = 2,2 \% + 3,5 \% = 5,7 \% = 0,057$$

Od tod izračunajmo absolutno napako površine:

$$\Delta S = S \delta S = 410,19 \text{ m}^2 \cdot 0,057 = 23,38 \text{ m}^2 = 20 \text{ m}^2$$

Končno zapišimo površino v zapisu z absolutno napako. Pazimo, da površino pravilno zaokrožimo:

$$S = \underline{\underline{410 \text{ m}^2 \pm 20 \text{ m}^2}}$$

5. Lesena kocka s stranico dolžine $12,3 \text{ cm} \pm 0,6 \text{ cm}$ ima maso $1,10 \text{ kg} \pm 0,05 \text{ kg}$. Kolikšna je njena gostota? Gostota telesa je kvocient njegove mase in prostornine ($\rho = \frac{m}{V}$).

Podatki:

$$a = 12,3 \text{ cm} \pm 0,6 \text{ cm}$$

$$m = 1,10 \text{ kg} \pm 0,05 \text{ kg}$$

Najprej izračunajmo prostornino kocke:

$$V = a^3 = (12,3 \text{ cm})^3 = 1860,867 \text{ cm}^3$$

Relativna napaka prostornine kocke je enaka trikratni relativni napaki njene stranice. Računanje prostornine je namreč množenje ($V = a \cdot a \cdot a$), pri množenju pa se seštevajo relativne napake. Izračunajmo relativno napako stranice:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{a} = \frac{0,6 \text{ cm}}{12,3 \text{ cm}} = 0,049 = 4,9 \%$$

Tako je relativna napaka prostornine:

$$\delta V = \delta a + \delta a + \delta a = 3\delta a = 3 \cdot 4,9 \% = 14,7 \%$$

Sedaj izračunajmo gostoto kocke:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1,10 \text{ kg}}{1860,867 \text{ cm}^3} = 5,91122 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

Ker se tudi pri deljenju seštevajo relativne napake, je relativna napaka gostote kocke vsota relativnih napak mase in prostornine kocke. Relativno napako prostornine smo že izračunali, izračunajmo še relativno napako mase:

$$\delta m = \frac{\Delta m}{m} = \frac{0,05 \text{ kg}}{1,10 \text{ kg}} = 0,045 = 4,5 \%$$

Tako je relativna napaka gostote kocke:

$$\delta \rho = \delta m + \delta V = 4,5 \% + 14,7 \% = 19,2 \% = 0,192$$

Od tod izračunajmo absolutno napako gostote:

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= \rho \delta \rho = 5,91122 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \cdot 0,192 = \\ &= 1,135 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} = 1 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \end{aligned}$$

1.2 Merske napake

Pravilno zaokrožena gostota kocke je tako:

$$\rho = \underline{\underline{6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \pm 1 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}}}$$

Za lažjo predstavo pretvorimo gostoto v osnovne enote ($\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$):

$$\rho = \underline{\underline{600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \pm 100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}$$

6. Kolikšna je relativna napaka polmera kroga, če je njegov obseg $36,7 \text{ cm} \pm 0,8 \text{ cm}$? Kolikšna pa je relativna napaka ploščine tega kroga?

Podatki:

$$o = 36,7 \text{ cm} \pm 0,8 \text{ cm}$$

Obseg kroga je dan z enačbo:

$$o = 2\pi r$$

Relativna napaka obsega je tako enaka relativni napaki polmera, saj se pri množenju seštevajo relativne napake, 2 in π pa nimata napake:

$$\delta o = \delta r$$

Ker je relativna napaka obsega

$$\delta o = \frac{\Delta o}{o} = \frac{0,8 \text{ cm}}{36,7 \text{ cm}} = 0,022 = 2,2 \%$$

je tudi relativna napaka polmera

$$\delta r = \underline{\underline{2,2 \%$$

Ploščina kroga je dana z enačbo:

$$S = \pi r^2$$

Relativna napaka ploščine je torej enaka dvakratni relativni napaki polmera ($S = \pi \cdot r \cdot r$; π nima napake):

$$\delta S = \delta \pi + \delta r + \delta r = 2\delta r = 2 \cdot 2,2 \% = \underline{\underline{4,4 \%$$

7. Kolikšna je absolutna napaka polmera krogle, ki ima prostornino $16,6 \text{ cm}^3 (1 \pm 9 \%)$? Prostornino krogle izračunamo z enačbo $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, kjer je r polmer krogle.

Podatki:

$$V = 16,6 \text{ cm}^3 (1 \pm 9 \%)$$

Prostornino krogle pišimo kot:

$$V = \frac{4\pi r \cdot r \cdot r}{3}$$

Pri množenju in deljenju se seštevajo relativne napake, zato je relativna napaka prostornine krogle enaka trikratni relativni napaki polmera, saj števila 4, 3 in π nimajo napake:

$$\delta V = \delta r + \delta r + \delta r = 3\delta r$$

Od tod sledi, da je relativna napaka polmera tretjina relativne napake prostornine:

$$\delta r = \frac{\delta V}{3} = \frac{9\%}{3} = 3\% = 0,03$$

Da bomo lahko izračunali absolutno napako polmera, ga najprej izrazimo in izračunajmo iz enačbe:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Od tod je:

$$r^3 = \frac{3V}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 16,6 \text{ cm}^3}{4\pi}} = 1,5825 \text{ cm}$$

Absolutna napaka polmera je tako:

$$\Delta r = r\delta r = 1,5825 \text{ cm} \cdot 0,03 = 0,04748 \text{ cm}$$

$$\Delta r = \underline{\underline{0,05 \text{ cm}}}$$

8. Avtomobil pospeši iz mirovanja do končne hitrosti na razdalji $270 \text{ m} \pm 10 \text{ m}$. To mu uspe v času $8,7 \text{ s} \pm 0,2 \text{ s}$. Izračunaj pospešek avtomobila in rezultat podaj v obliki z absolutno in relativno napako. Pospešek izračunamo z enačbo $a = \frac{2s}{t^2}$, kjer je s pot, t pa čas.

Podatki:

$$s = 270 \text{ m} \pm 10 \text{ m}$$

$$t = 8,7 \text{ s} \pm 0,2 \text{ s}$$

Izračunajmo relativni napaki poti in dolžine, saj v enačbi $a = \frac{2s}{t^2}$ delimo in množimo, zato bomo seštevati relativne napake:

$$\delta s = \frac{\Delta s}{s} = \frac{10 \text{ m}}{270 \text{ m}} = 0,037 = 3,7\%$$

in

$$\delta t = \frac{\Delta t}{t} = \frac{0,2 \text{ s}}{8,7 \text{ s}} = 0,023 = 2,3\%$$

Izračunajmo pospešek avtomobila:

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 270 \text{ m}}{(8,7 \text{ s})^2} = 7,13436 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Enačbo za računanje pospeška pišimo kot:

$$a = \frac{2s}{t \cdot t}$$

Od tod sledi, da je relativna napaka pospeška enaka:

$$\delta a = \delta s + \delta t + \delta t = 3,7\% + 2,3\% + 2,3\% = 8,3\% = 0,083$$

Izračunajmo še absolutno napako pospeška:

$$\Delta a = a\delta a = 7,13436 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,083 = 0,592 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Pospešek zaokrožimo in zapišimo z absolutno in relativno napako:

$$a = \underline{\underline{7,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \pm 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \underline{\underline{7,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (1 \pm 8,3\%)}}$$

9. Prostornino stožca izračunamo z enačbo $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, kjer je r polmer osnovne ploskve, h pa višina stožca. Kolikšna je relativna napaka višine stožca, če je njegova prostornina $23,7 \text{ cm}^3 \pm 0,8 \text{ cm}^3$, polmer njegove osnovne ploskve pa je dan z 1,0-odstotno natančnostjo?

Podatki:

$$V = 23,7 \text{ cm}^3 \pm 0,8 \text{ cm}^3$$

$$\delta r = 1,0\%$$

Enačbo za računanje stožca zapišimo kot:

$$V = \frac{\pi \cdot r \cdot r \cdot h}{3}$$

Relativna napaka prostornine stožca je tako vsota dvakratne relativne napake polmera osnovne ploskve in relativne napake višine stožca:

$$\delta V = 2\delta r + \delta h$$

Od tod izrazimo relativno napako višine stožca:

$$\delta h = \delta V - 2\delta r$$

Iz podatka $V = 23,7 \text{ cm}^3 \pm 0,8 \text{ cm}^3$ izračunajmo relativno napako prostornine:

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{0,8 \text{ cm}^3}{23,7 \text{ cm}^3} = 0,034 = 3,4\%$$

Tako je relativna napaka višine:

$$\Delta h = 3,4\% - 2 \cdot 1,0\% = \underline{\underline{1,3\%}}$$

10. Dana sta izmerka: $x = 12,4 \pm 0,6$ in $y = 8,7 \pm 0,3$. Izračunaj izraza $A = \frac{x^3}{7y^2}$ in $B = x^2 - 5y$. Rezultata primerno zaokroži.

Podatki:

$$x = 12,4 \pm 0,6$$

$$y = 8,7 \pm 0,3$$

Najprej izračunajmo relativni napaki izmerkov:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0,6}{12,4} = 0,048 = 4,8 \%$$

in

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{0,3}{8,7} = 0,034 = 3,4 \%$$

Izračunajmo izraz A :

$$A = \frac{x^3}{7y^2} = \frac{12,4^3}{7 \cdot 8,7^2} = 3,598558$$

Če si izraz za računanje količine A mislimo zapisan kot

$$A = \frac{x \cdot x \cdot x}{7 \cdot y \cdot y}$$

vidimo, da je relativna napaka količine A vsota trikratne relativne napake izmerka x in dvakratne relativne napake izmerka y (število 7 nima napake):

$$\delta A = 3\delta x + 2\delta y = 3 \cdot 4,8 \% + 2 \cdot 3,4 \% = 21,2 \% = 0,212$$

Izračunajmo absolutno napako količine A :

$$\Delta A = A\delta A = 3,598558 \cdot 0,212 = 0,7629 = 0,8$$

Glede na absolutno napako zaokrožimo količino A :

$$A = \underline{\underline{3,6 \pm 0,8}}$$

Pri računanju količine B moramo biti pazljivi, saj v izrazu nastopata množenje in odštevanje, tako da napako količine B ne moremo določiti v enem koraku. Najprej izračunajmo x^2 :

$$x^2 = 12,4^2 = 153,76$$

Relativna napaka količine $x^2 = x \cdot x$ je dvakratna relativna napaka izmerka x :

$$\delta(x^2) = 2\delta x = 2 \cdot 4,8 \% = 9,6 \% = 0,096$$

Za izračun količine B bomo morali od te vrednosti odšteti $5y$, zato bomo pri računanju končne napake potrebovali absolutno napako x^2 . Izračunajmo jo:

$$\Delta(x^2) = x^2\delta(x^2) = 153,76 \cdot 0,096 = 14,76$$

1.2 Merske napake

Navajeni smo, da absolutno napako zaokrožimo na eno mesto, vendar bomo to naredili šele na koncu, pri absolutni napaki rezultata.

Sedaj izračunajmo še $5y$:

$$5y = 5 \cdot 8,7 = 43,5$$

Ker se pri seštevanju seštevajo absolutne napake, je absolutna napaka izraza $5y = y + y + y + y + y$ enaka petkratni absolutni napaki izmerka y :

$$\Delta(5y) = 5(\Delta y) = 5 \cdot 0,3 = 1,5$$

Končno izračunajmo količino B :

$$B = x^2 - 5y = 153,76 - 43,5 = 110,26$$

Pri odštevanju se seštevajo absolutne napake, zato je absolutna napaka količine B vsota absolutnih napak količin x^2 in $5y$:

$$\Delta B = \Delta(x^2) + \Delta(5y) = 14,76 + 1,5 = 16,26 = 20$$

Zaokrožimo količino B glede na njeno absolutno napako:

$$B = \underline{\underline{110 \pm 20}}$$

11. Oцени absolutno napako izraza $(n^2 - m)^2$, če je $n = 4,50 \pm 0,03$ in $m = 8,75 \pm 0,04$. Rezultat primerno zaokroži.

Podatki:

$$n = 4,50 \pm 0,03$$

$$m = 8,75 \pm 0,04$$

1.NAČIN

Najprej izračunajmo količino v oklepaju $(n^2 - m)$ in jo nato kvadrirajmo. Potrebovali bomo relativno napako izmerka n , ki ga moramo kvadrirati:

$$\delta n = \frac{\Delta n}{n} = \frac{0,03}{4,50} = 0,0067 = 0,67 \%$$

Izračunajmo n^2 :

$$n^2 = 4,50^2 = 20,25$$

Relativna napaka količine n^2 je dvakratna relativna napaka izmerka n :

$$\delta(n^2) = 2\delta n = 2 \cdot 0,67 \% = 1,34 \% = 0,0134$$

Absolutna napaka količine n^2 je tako:

$$\Delta(n^2) = n^2 \delta(n^2) = 20,25 \cdot 0,0134 = 0,27135$$

Od n^2 odštejmo m :

$$n^2 - m = 20,25 - 8,75 = 11,5$$

Absolutna napaka vrednosti $n^2 - m$ je vsota absolutnih napak n^2 in m :

$$\Delta(n^2 - m) = \Delta n^2 + \Delta m = 0,27135 + 0,04 = 0,31135$$

Vrednost $(n^2 - m)$ moramo kvadrirati, zato za izračun končne napake potrebujemo relativno napako te vrednosti:

$$\delta(n^2 - m) = \frac{\Delta(n^2 - m)}{n^2 - m} = \frac{0,31135}{11,5} = 0,027 = 2,7\%$$

Na koncu kvadrirajmo $n^2 - m$:

$$(n^2 - m)^2 = 11,5^2 = 132,25$$

Relativna napaka rezultata je dvakratna relativna napaka vrednosti $n^2 - m$:

$$\delta(n^2 - m)^2 = 2\delta(n^2 - m) = 2 \cdot 2,7\% = 5,4\% = 0,054$$

Izračunajmo absolutno napako rezultata:

$$\begin{aligned} \Delta(n^2 - m)^2 &= (n^2 - m)^2 \delta(n^2 - m)^2 = \\ &= 132,25 \cdot 0,054 = 7,1415 = 7 \end{aligned}$$

Končno zaokrožimo rezultat glede na absolutno napako:

$$(n^2 - m)^2 = \underline{\underline{132 \pm 7}}$$

2. NAČIN

Najprej kvadrirajmo izraz, ki ga moramo izračunati:

$$(n^2 - m)^2 = n^4 - 2n^2m + m^2$$

Vsak del posebej izračunajmo in mu določimo absolutno napako. Najprej n^4 :

$$n^4 = 4,50^4 = 410,0625$$

Relativna napaka potence n^4 je štirikratna relativna napaka izmerka n . Relativno napako izmerka n smo izračunali v prvem načinu reševanja in jo uporabimo:

$$\delta n^4 = 4\delta n = 4 \cdot 0,67\% = 2,68\% = 0,0268$$

Tako je absolutna napaka izraza n^4 :

$$\Delta n^4 = n^4 \delta n^4 = 410,0625 \cdot 0,0268 = 10,989$$

Izračunajmo $2n^2m$ in ocenimo napako tega:

$$2n^2m = 2 \cdot 4,50^2 \cdot 8,75 = 354,375$$

Relativna napaka tega dela je vsota dvakratne napake izmerka n in napake izmerka m :

$$\delta(2n^2m) = 2\delta n + \delta m$$

Ker je relativna napaka izmerka m

$$\delta m = \frac{\Delta m}{m} = \frac{0,04}{8,75} = 0,0046 = 0,46\%$$

je relativna napaka drugega dela:

$$\delta(2n^2m) = 2 \cdot 0,67\% + 0,46\% = 1,8\% = 0,018$$

Absolutna napaka dela $2n^2m$ je tedaj:

$$\Delta(2n^2m) = 2n^2m \delta(2n^2m) = 354,375 \cdot 0,018 = 6,37875$$

Zadnji del m^2 je:

$$m^2 = 8,75^2 = 76,5625$$

Relativna napaka izraza m^2 je dvakratna relativna napaka izmerka m :

$$\delta(m^2) = 2\delta m = 2 \cdot 0,46\% = 0,92\% = 0,0092$$

Od tod je absolutna napaka zadnjega dela:

$$\Delta m^2 = m^2 \delta(m^2) = 76,5625 \cdot 0,0092 = 0,704375$$

Končno izračunajmo vrednost izraza:

$$\begin{aligned} (n^2 - m)^2 &= n^4 - 2n^2m + m^2 = \\ &= 410,0625 - 354,375 + 76,5625 = \\ &= 132,25 \end{aligned}$$

Absolutna napaka vrednosti je vsota absolutnih napak posameznih delov:

$$\begin{aligned} \Delta(n^2 - m)^2 &= 10,989 + 6,37875 + 0,704375 = \\ &= 18,0721 = 20 \end{aligned}$$

Zaokrožimo rezultat glede na absolutno napako:

$$(n^2 - m)^2 = \underline{\underline{130 \pm 20}}$$

Pojasnilo:

Do različnih rezultatov pri računanju na različne načine pride zato, ker računanje z napakami ni natančno, pač pa le približno. Pri tem dobimo približno vrednost napake rezultata, ki je pri zapletenejših primerih, kot v tej nalogi, lahko res le groba ocena.

Pomembno:

Pri reševanju pravih fizikalnih problemov so podatki vedno izmerjene količine in moramo paziti pri podajanju rezultatov, ki jih dobimo iz podatkov (izmerkov). Razen v tem poglavju, kjer so merske napake bistvene, pa v šoli ponavadi napak ne računamo, pač pa se vnaprej odločimo za neko natančnost, s katero podajamo podatke in rezultate. V tej knjigi (in tudi naslednjih knjigah te zbirke) so podatki podani na dve mesti natančno, prav tako so rezultati zaokroženi na dve mesti. Zaradi natančnosti so vmesni rezultati zaokroženi na štiri mesta. Pri računanju ponavadi vmesne rezultate kar pustimo v kalkulatorju in jih uporabimo za nadaljne računanje, ne da bi jih zaokrožili. Tako dobljeni končni rezultati se ne bi smeli opazno razlikovati od tistih v knjigi.