ODVODI

1. ODVOD PO DEFINICIJI:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Tangenta na krivuljo $y=f(x)$ v točki x_0 ima SMERNI KOEFICIENT (k) enak odvodu funkcije v tej točki:

$$k_t=f'(x_0)=\operatorname{tg}\varphi$$

2. TABELA ODVODOV

1. $k'=0$ (k = konstanta, številka)
2. $x'=1$
3. $(*^r)'=r*^{r-1}\cdot(*)'$
4. $(\sin *)'=\cos *\cdot(*)'$
5. $(\cos *)'=-\sin *\cdot(*)'$
6. $(\tan *)'=\frac{1}{\cos^2 *}\cdot(*)'$
7. $(\operatorname{ctan} *)'=-\frac{1}{\sin^2 *}\cdot(*)'$
8. $(e^*)'=e^*\cdot(*)'$
9. $(\ln *)'=\frac{1}{*}\cdot(*)'$
10. $(\log_a *)'=\frac{1}{*\ln a}\cdot(*)'$
11. $(a^*)'=a^*\cdot\ln a\cdot(*)'$
12. $(\arcsin *)'=\frac{1}{\sqrt{1-*^2}}\cdot(*)'$
13. $(\arccos *)'=-\frac{1}{\sqrt{1-*^2}}\cdot(*)'$
14. $(\arctan *)'=\frac{1}{1+*^2}\cdot(*)'$
15. $(\operatorname{arccot} *)'=-\frac{1}{1+*^2}\cdot(*)'$

3. PRAVILA ODVODA

a) ODVOD PRODUKTA:

$$(a\cdot b)'=a'\cdot b+a\cdot b'$$

b) ODVOD ULOMKA:

$$\left(\frac{a}{b}\right)'=\frac{a'\cdot b-a\cdot b'}{b^2}$$

c) FAKTOR PREPIŠEMO

$$(ka)'=k\cdot a'$$

d) KOMPOZITUM:

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

e) INVERZNA FUNKCIJA:

$$(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

f) KOREN → SPREMENI V EKSPONENT

$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac12})'=\frac12 x^{-\frac12}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Odvodov ni treba racionalizirati.

g) ODVOD POTENCE

- najprej odvajamo eksponent (oklepaj si predstavljamo kot x)
- nato odvajamo še kar je bilo v oklepaju:

$$[(4x^2+3)^3]'=$$
$$=3(4x^2+3)^2\cdot(4x^2+3)'=$$
$$=3(4x^2+3)^2\cdot(8x)=$$
$$=24x(4x^2+3)^2$$

h) ODVOD KORENA

- najprej koren spremenimo v eksponent $\sqrt[2]{x^1}=x^{\frac12}$
- nato rešujemo kot potenco:

$$\left(\sqrt[3]{(x^2+4)^2}\right)'=\left(\underbrace{(x^2+4)}_{\text{kot } x}{}^{\frac23}\right)'=$$
$$(x^{\frac23})'=\frac23 x^{-\frac13}$$
$$=\frac23(x^2+4)^{-\frac13}\cdot(x^2+4)'=$$
$$=\frac{2}{3(x^2+4)^{\frac13}}\cdot(2x)=$$
$$=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2+4}}$$

i) IMPLICITNO PODANA FUNKCIJA

Enačba z x in y, ko y ni izražen ($y=\ldots$)

npr. krožnica, elipsa, hiperbola, parabola

POSTOPEK REŠEVANJA:

- x-e odvajamo običajno po tabeli
- y-e prav tako, le da jih pomnožimo z y'
- odvajamo LEVO in DESNO stran.
- na koncu izrazimo $y'=\ldots$

PRIMER: Odvajaj:

$$y^3+y-x^2+4x+\underbrace{x\cdot y}_{\text{PRODUKT}}=0$$
$$3y^2\cdot y'+y'-2x+4+y+xy'=0$$
$$(xy)'=x'\cdot y+xy'=y+xy'$$

Izrazimo y':

$$y'(3y^2+1+x)=2x-4-y$$
$$y'=\frac{2x-4-y}{3y^2+1+x}$$

4. STACIONARNE TOČKE $f'(x)=0$

- so ničle odvoda $f'(x)=0$
- so možni ekstremi, kar preverimo na 2 možna načina:

$\boxed{a}$ S PREDZNAKI $f'(x)$ na x osi

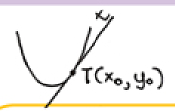
1. nariši x os
2. nanjo vstavi ničle odvoda in pole odvoda (pri racionalni funk.)
3. na desni strani ugotovimo prvi predznak:
   $f'(x)=\frac{ax^m\ldots}{bx^n\ldots}$
   $\frac{a}{b}>0$ začnemo s ⊕
   $\frac{a}{b}<0$ začnemo z ⊖
4. glede na lihost/sodost določimo še ostale predznake:
   LIHE ničle/poli: SPREMENIJO
   SODE ničle/poli: OHRANIJO
5. narišemo PUŠČICE (vedno iz leve proti desni), ki kažejo:
   ⊕ ↗ naraščanje, ⊖ ↘ padanje
6. Ugotovimo ali je stacionarna točka ekstrem:
   ⊕ ⊖ ↗ ↘ max; ⊖ ⊕ ↘ ↗ min; ⊕⊕ ↗↗ ⊖⊖ ↘↘ ni ekstrem
7. x, ki predstavlja ekstrem, vstavimo v prvotno funkcijo, da dobimo še y
8. Zapišemo ekstreme: $E_{min/max}(x,y)$

$\boxed{b}$ Z DRUGIM ODVODOM $f''(x)$

1. odvajamo prvi odvod, da dobimo drugi odvod
2. V drugi odvod vstavimo stacionarno točko (dobljeno iz prvega odvoda: $f'(x)=0$)

$f''(x_0)>0$ JE EKSTREM → MIN
$f''(x_0)<0$ JE EKSTREM → MAX
$f''(x_0)=0$ NI EKSTREM

5. RAČUNANJE TANGENTE



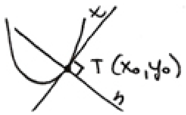
1. Izračunaj točko $T(x_0, y_0)$
2. Odvajaj funkcijo $f'(x)$
3. V odvod vstavi x_0 iz točke in dobiš k tangente

$f'(x_0) = k_t$

4. Vstavi v formulo za tangento:

$y - y_0 = k_t(x - x_0)$

6. RAČUNANJE NORMALE



1. Izračunaj točko $T(x_0, y_0)$
2. Odvajaj funkcijo $f'(x)$
3. V odvod vstavi x_0 iz točke in dobiš k tangente:

$f'(x_0) = k_t$

4. Izračunaj k normale:

$k_N = -\frac{1}{k_T}$

5. Vstavi v formulo za normalo:

$y - y_0 = k_N(x - x_0)$

7. NAKLONSKI KOT TANGENTE oz. KOT MED GRAFOM in ABSCISNO OSJO (x)

1. Izračunaj točko $T(x_0, 0)$
2. Odvajaj funkcijo $f'(x)$
3. V odvod vstavi x_0 iz točke, da dobiš k_T

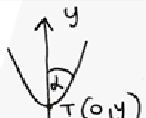
$f'(x_0) = k_T$

4. k tangente enači z $\tan\varphi$ in dobiš kot φ

$\tan\varphi = k_T$

5. Če je kot NEGATIVEN, mu prištej 180°.

8. KOT MED GRAFOM IN ORDINATNO OSJO (y)



1. Izračunaj točko $T(0, y_0)$
2. Odvajaj funkcijo $\to f'(x)$
3. V odvod vstavi $x = 0$ in dobiš k_T

$f'(0) = k_T$

4. Izračunaj kot φ:

$\tan\varphi = k_T$

(če je negativen $+180°$)

5. Izračunaj α = iskani kot:

$\alpha = 90° - \varphi$ (če je $\varphi < 90°$)

$\alpha = \varphi - 90°$ (če je $\varphi > 90°$)

9. KOT MED GRAFOMA FUNKCIJ

1. Izračunaj presečišče $P(x_0, y_0)$
   - enači $f(x) = g(x)$ ali
   - izpostavi iz ene in vstavi v drugo ali
   - podpiši eno pod drugo, poišči nasprotne koeficiente in seštej
2. Odvajaj obe funkciji $\to f'(x)$, $g'(x)$
3. V odvoda vstavi x_0 iz točke, da dobiš k_1 in k_2.

$f'(x_0) = k_1$, $g'(x_0) = k_2$

4. Vstavi k_1 in k_2 v formulo in izračunaj kot φ:

$\tan\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$

[Če je imenovalec $= 0 \to \varphi = 90°$]

10. DIFERENCIAL = df

$df = f'(x)\,dx$

OBIČAJNO ODVAJAMO $f(x)$

DOPIŠEMO

• $g(x) = 5e^{3x} + x^4$

$dg = (5 \cdot e^{3x} \cdot 3 + 4x^3)\,dx$

$dg = (15e^{3x} + 4x^3)\,dx$

11. $e^x > 0$

$e^1 = e$, $e^0 = 1$, $e^{-1} = \frac{1}{e}$ } vedno +

12. APROKSIMACIJA oz. PRIBLIŽNA VREDNOST

$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,dx$

$\sqrt{1{,}08} = \sqrt{1 + 0{,}08} \to x_0 = 1,\ h = dx = 0{,}08$

• $f(x) = \sqrt{x} \to f(x_0) = \sqrt{1} = 1$

• $f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to$

$f'(x_0) = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$

• $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx$

$f(1 + 0{,}08) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}08 = 1{,}04$

$\sqrt{1{,}08} \doteq 1{,}04$

$\ln 0{,}92 = \ln(1 - 0{,}08) \to x_0 = 1,\ h = dx = -0{,}08$

• $f(x) = \ln x \to f(x_0) = \ln 1 = 0$

• $f'(x) = \frac{1}{x} \to f'(x_0) = \frac{1}{1} = 1$

• $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx$

$f(1 - 0{,}08) = 0 + 1 \cdot (-0{,}08) = -0{,}08$

$\ln 0{,}92 \doteq -0{,}08$

NEGATIVNI EKSPONENT

• $x^{-1} = \frac{1}{x}$ • $2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

• $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ • $(2x)^{-3} = \frac{1}{(2x)^3} = \frac{1}{8x^3}$

• $\left(\frac{2}{x}\right)^{-1} = \frac{x}{2}$ • $\left(\frac{2}{x}\right)^{-2} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$

DELNO KORENJENJE

ZUNAJ KORENA, KOREN

$x^{\frac{5}{2}} = x^{2\frac{1}{2}} = x^2 \cdot \sqrt[2]{x^1} = x^2\sqrt{x}$

$x^{\frac{8}{3}} = x^{2\frac{2}{3}} = x^2\sqrt[3]{x^2}$